Zadání a řešení testu z matematiky a zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od jara 2015

Zpráva o výsledcích přijímacího řízení

do magisterského navazujícího studia od jara 2015

Studium v českém jazyce

Počet podaných přihlášek	173
Počet přihlášených uchazečů	162
Počet uchazečů, kteří splnili podmínky přijetí	93
Počet uchazečů, kteří nesplnili podmínky přijetí	69
Počet uchazečů přijatých ke studiu, bez uvedení počtu uchazečů přijatých ke studiu až na základě výsledku přezkoumání původního rozhodnutí	93
Počet uchazečů přijatých celkem	93
Percentil pro přijetí	9,00 (odpovídá celkem alespoň 19 bodům)

Základní statistické charakteristiky

		Informatika	Matematika	Celkem
Počet otázek		30	25	55
Počet uchazečů, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky		107	107	107
Nejlepší možný výsledek		30.00	25.00	55.00
Nejlepší skutečně dosažený výsledek		28.75	25	52.5
Průměrný výsledek		17.03	16.24	33.27
Medián		17.75	17.5	35.0
Směrodatná odchylka		5.82	5.1	9.51
	Percentil			
Decilové hranice výsledku *	10	8.9	9.3	20.15
	20	12.1	12.8	26.35
	30	15.15	14.5	29.95
	40	16.35	16.0	32.95
	50	17.75	17.5	35.0
	60	19.4	18.4	36.65
	70	20.25	19.25	39.0
	80	22.2	20.25	40.75
	90	23.85	21.9	43.6

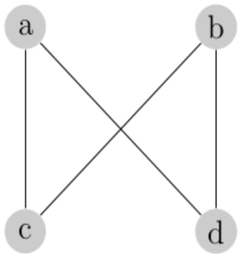
* Decilové hranice výsledku zkoušky vyjádřené d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9 jsou hranice stanovené tak, že rozdělují uchazeče seřazené podle výsledku zkoušky do stejně velkých skupin, přičemž d5 je medián.

Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		151

Teorie grafů

1 Uvažme následující graf:



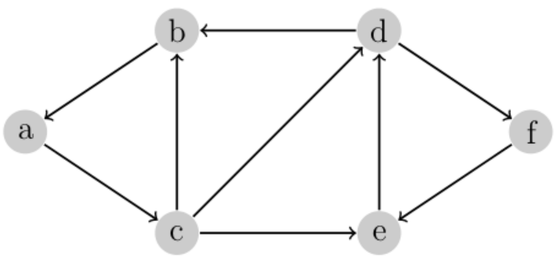
Kolik má různých koster?

***A** 4
B 3
C 2
D 1
E 5

2 Uvažme strom o $n \geq 3$ vrcholech. Po odebrání hrany mezi dvěma jeho libovolnými vrcholy obecně platí:

A Výsledný graf může i nemusí zůstat souvislý.
B Mezi žádnou dvojicí vrcholů ve výsledném grafu nevede cesta.
***C** Výsledný graf je tvořen právě dvěma stromy.
D Výsledný graf má $n-1$ hran.
E Výsledný graf je tvořen alespoň třemi stromy.

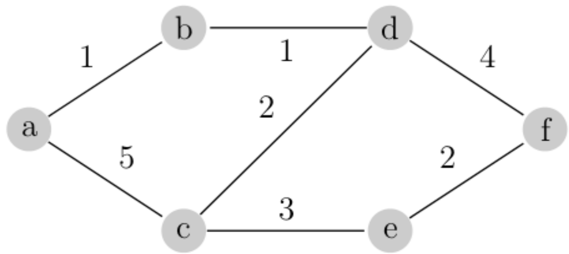
3 Uvažme následující orientovaný graf:



Rozhodněte, které z následujících tvrzení o prohledávání daného grafu **do hloubky** z vrcholu a platí. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

A Vrchol b bude vždy navštíven dříve než vrchol f.
B Vrchol f bude vždy navštíven jako poslední.
C Vrchol e bude vždy navštíven dříve než vrchol f.
***D** Vrchol e může být navštíven jako poslední.
E Vrchol b nemůže být navštíven jako poslední.

4 Uvažme následující neorientovaný, hranově ohodnocený graf:



Jaká je cena (tj. součet ohodnocení hran) jeho minimální kostry?

A 10
***B** 9
C 11
D 8
E 12

5 Kolik nejvýše hran může mít neorientovaný acyklický graf o n vrcholech?

A $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

B n

C $2n-1$

D $\frac{n\cdot n}{2}$

***E** $n-1$

Množiny, relace, funkce, logika

6 Uvažme výrok: „Všichni studenti zodpověděli správně všechny otázky." Který z následujících výroků je jeho negací?

***A** Alespoň jeden student nezodpověděl správně alespoň jednu otázku.
B Žádný student nezodpověděl správně všechny otázky.
C Alespoň jeden student nezodpověděl správně ani jednu otázku.
D Nejvýše jeden student zodpověděl správně všechny otázky.
E Všichni studenti zodpověděli nesprávně všechny otázky.

7 Uvažme libovolnou dvouprvkovou množinu $M = \{a, b\}$. Kolik existuje různých relací uspořádání na množině M? (Pozn.: Uspořádání je relace, která je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.)

A 1
***B** 3
C 4
D 2
E 0

8 Která z následujících formulí *není* tautologie? (Ve všech odpovědích jsou A, B, C výrokové proměnné.)

A $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
B $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg C)$
C $(A \wedge B) \iff \neg(\neg A \vee \neg B)$
***D** $\neg A \vee (B \wedge (A \vee \neg A)) \vee \neg C$
E $C \Rightarrow (A \vee \neg A)$

9 Uvažme dvě dvouprvkové množiny $A = \{a, b\}, B = \{b, c\}$ a dvě tříprvkové množiny $C = \{c, d, e\}$ a $D = \{d, e, f\}$. Kolik prvků má množina $(A \times C) \cap (B \times D)$?

A 0
B 9
C 6
D 4
***E** 2

10 Uvažme relaci R na množině všech celých čísel takovou, že (a, b) je v relaci právě tehdy, když $|a - b| \leq 1$. Uvedená relace je:

A reflexivní, symetrická a tranzitivní
***B** reflexivní a symetrická
C uspořádání
D symetrická a tranzitivní
E reflexivní a tranzitivní

11 Nechť A, B jsou libovolné konečné množiny. Které z následujících tvrzení *není* obecně pravdivé? (Pozn.: Symbolem $|X|$ značíme počet prvků konečné množiny X, symbolem $\mathcal{P}(X)$ množinu všech podmnožin množiny X.)

A $|\mathcal{P}(A)| > |A|$
B $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \iff (A = B)$
C $|A \cup B| \geq |A|$
D $(A \subseteq B) \Rightarrow |A| \leq |B|$
***E** $|A \cup B| = |A| + |B|$

Matematická analýza

12 Jaký je součet následující nekonečné číselné řady? $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i}}{2^i}$

A Není možné určit, řada diverguje k $+\infty$.
B Není možné určit, řada osciluje.
C $\frac{1}{2}$
***D** 2
E 1

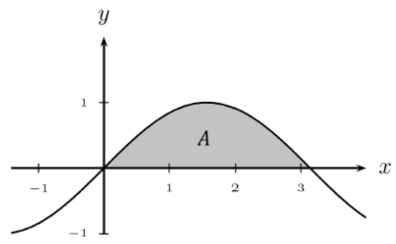
13 Která z následujících funkcí je prostá na $\mathbb{R}$? (Pozn.: Funkce f je prostá na $\mathbb{R}$, jestliže pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.)

A $f(x) = x^2$
B $f(x) = \sin x$
***C** $f(x) = x^3$
D $f(x) = |x|$
E $f(x) = 5$

14 Spočtěte integrál $\int (28x^6 + \cos x - e^x)\mathrm{d}x$. (Pozn.: Ve všech možnostech je c integrační konstanta.)

***A** $4x^7 + \sin x - e^x + c$
B $168x^5 - \sin x - e^x + c$
C $4x^7 - \sin x - e^x + c$
D $4x^7 + \sin x + e^x + c$
E $196x^7 - \sin x - e^x + c$

15 Vypočtěte obsah rovinného útvaru A obsahujícího přesně ty body (x, y) splňující $x \geq 0, x \leq \pi, y \geq 0, y \leq \sin x$. (Viz obrázek.)



A 0
***B** 2
C $\frac{\pi}{2}$
D π
E -2

16 Mějme funkci $f(x) = x^3 + e^{\sin x}$. Která z následujících funkcí je rovna derivaci funkce f?

A $3x^2 + e^{\cos x}$
***B** $3x^2 + e^{\sin x} \cdot \cos x$
C $x^2 + e^{\cos x} \cdot \sin x$
D $\frac{x^2}{3} + e^{\cos x}$
E $3x^2 + e^{\sin x}$

Lineární algebra

17 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -x + 5y + 2z &= 3 \\ x - 5y - z &= -3 \\ 2x - 11y - 2z &= -6 \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.
B Soustava nemá řešení.
C Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.
D Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.
***E** Soustava má právě jedno řešení.

---

18 Uvažme vektor $(-3, 2, 1)$ ve standardní bázi $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Najděte jeho souřadnice v bázi $[(0, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)]$.

A $(3, 2, 1)$
B $(1, 2, 3)$
C Vyjádření v zadané bázi neexistuje.
***D** $(-1, -3, 5)$
E $(-1, 2, -3)$

---

19 Která z následujících trojic vektorů je lineárně nezávislá?

A $(2, 2, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 4)$
B $(2, 0, 1), (1, 0, 2), (3, 0, 3)$
C $(4, 4, 4), (6, 6, 6), (1, 1, 1)$
***D** $(1, 1, 0), (0, 2, 2), (3, 0, 3)$
E $(2, 3, 4), (3, 2, 1), (1, 1, 1)$

---

20 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

A $\begin{pmatrix} 0 & 21 \\ 4 & 5 \\ -4 & -19 \end{pmatrix}$
B $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 7 & 27 & 9 \\ 14 & -11 & 3 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 2 & 27 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$
D $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 21 & 5 & -19 \end{pmatrix}$
***E** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 19 & 27 & 9 \end{pmatrix}$

---

21 Která z následujících matic zadává zobrazení A z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které je posunutím (translací) roviny o vektor $(1, 1)$? Zobrazení je *translace o vektor* $(1, 1)$, jestliže každému bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ přiřadí bod $(x + 1, y + 1)$.

A $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
B $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$
***C** Matice neexistuje.
D $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
E $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pravděpodobnost

---

22 Mějme náhodnou proměnnou X takovou, že $P(X = 48) = \frac{1}{2}, P(X = 28) = \frac{1}{4}, P(X = 7) = \frac{1}{7}, P(X = 0) = \frac{3}{28}$. Vypočtěte *střední hodnotu* náhodné proměnné X. (Pozn.: Zápis $P(X = y)$ značí pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná X nabude hodnoty y.)

A 16
B 24
C $\frac{64}{7}$
***D** 32
E 0

---

23 Hrací kostkou házeme opakovaně, dokud nehodíme šestku. Jaká je pravděpodobnost, že budeme házet právě pětkrát?

***A** $(\frac{5}{6})^4 \cdot \frac{1}{6}$
B $5 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
C $\frac{1}{6}$
D $5 \cdot (\frac{5}{6})^4 \cdot \frac{1}{6}$
E $(\frac{5}{6})^5 \cdot \frac{1}{6}$

---

24 Hodíme dvakrát po sobě hrací kostkou a výsledky hodů sečteme. Kterého z následujících součtů dosáhneme s nejvyšší pravděpodobností?

A 13
***B** 7
C 8
D 6
E 9

25 Žáci psali ve škole písemku. Šest z nich mělo jedničku, sedm dvojku, osm trojku, dva čtyřku a nikdo neměl pětku. Jaký byl medián známek?

A $\frac{52}{23}$
B 2,5
***C** 2
D 3
E 1