Přijímací zkouška - matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Matematická analýza

1 $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{x} =$

***A** 0
B 1
C -1
D ∞
E e

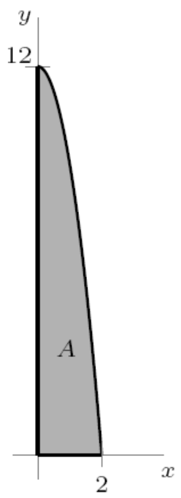
2 Mějme funkci
$f(x) = e^{x^3+x}$.

Čemu je rovna derivace funkce f v bodě 1?

A $-e$
B 0
C $\frac{e^2}{3}$
***D** $4e^2$
E $3e^4$

3 Vypočtěte obsah rovinného útvaru A obsahujícího přesně ty body (x, y) splňující následující nerovnosti:
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$y \leq -3x^2 + 12$.

(Viz obrázek.)



A 11
B 14
***C** 16
D 18
E 21

4 Nechť $f(x)$ je spojitá funkce, která má na intervalu $[0,1]$ **kladnou první derivaci** (tj. hodnota $f'(x)$ je definována a je ostře větší než 0 pro všechna $0 \leq x \leq 1$). Které z následujících tvrzení je jistě pravdivé?

A $f(x) > 0$ pro všechna $0 \leq x \leq 1$
***B** $f(0) < f(1)$
C $\int_0^1 f(x)dx > 0$
D Druhá derivace funkce f je na intervalu $[0,1]$ rovněž kladná.
E Funkce f je na intervalu $[0,1]$ konstantní.

---

5 Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité funkce. Která z následujících (ne)rovností **není** obecně pravdivá?

A $\int_{-1}^1 f(x)\,dx + \int_{-1}^1 g(x)\,dx = \int_{-1}^1 (f(x)+g(x))\,dx$
B $0 \leq \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx$ (kde $|f(x)|$ značí absolutní hodnotu z $f(x)$)
C $\int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(x)\,dx$
***D** $\int_{-1}^1 f(x)\cdot g(x)\,dx = (\int_{-1}^1 f(x)\,dx)\cdot(\int_{-1}^1 g(x)\,dx)$
E $\int_{-1}^1 -f(x)\,dx = -\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

Pravděpodobnost

---

6 Mějme náhodnou proměnnou X takovou, že $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=2)=\frac{1}{2}$ a $P(X=4)=\frac{1}{6}$. Vypočtěte **rozptyl** náhodné proměnné X. (Zápis $P(X=y)$ značí pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná X nabude hodnoty y.)

A $\frac{25}{9}$
***B** $\frac{17}{9}$
C $\frac{7}{9}$
D 4
E 2

---

7 Předpokládejme, že v každém měsíci investor s pravděpodobností $0,8$ ztratí 100 000 Kč a s pravděpodobností $0,2$ získá 200 000 Kč. Jaká je střední hodnota investorova bohatství po **dvou** měsících, jestliže investor začíná s částkou 1 000 000 Kč?

A 1 100 000 Kč
B 1 000 000 Kč
C 950 000 Kč
***D** 920 000 Kč
E 860 000 Kč

---

8 Hoďme dvěma různými (šestistěnnými) kostkami, červenou a zelenou, přičemž tyto dva hody jsou na sobě nezávislé. Jaká je podmíněná pravděpodobnost toho, že součet čísel na obou kostkách je 8, za podmínky, že na červené kostce padne sudé číslo?

A 1
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{1}{4}$
***E** $\frac{1}{6}$

---

9 Mějme statistický soubor $\{0,1,1,1,5,5,6,8,9\}$. Čemu je roven **medián** tohoto souboru?

A 0
B 1
C 4
***D** 5
E 9

Množiny, relace, funkce, logika

10 Která z následujících relací je **bijektivní funkcí** na množině $\{a, b, c\}$?

A $\{(a, b)\}$
B $\{(a, c), (b, c), (c, c)\}$
C $\{(a, b), (b, b), (b, c), (c, a)\}$
D $\{(a, b), (b, a), (c, a)\}$
***E** $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$

11 Nechť A je nějaká tříprvková a B je nějaká dvouprvková množina. Kolik prvků má potenční množina množiny $A \times B$? (Potenční množina množiny X je množina všech jejích podmnožin.)

***A** 2^6
B 6^2
C 2^5
D 30
E $6!$

12 Na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ uvažme standardní relaci nerovnosti $\neq$. Tato relace:

A Je reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.
B Není ani reflexivní ani symetrická ani tranzitivní.
***C** Je symetrická, ale není reflexivní ani tranzitivní.
D Je relací ekvivalence.
E Je reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

13 Která z následujících výrokových formulí **není** splnitelná? (Ve všech odpovědích jsou A, B, C výrokové proměnné.)

A $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$
B $A \wedge \neg B \wedge \neg C$
C $B \Rightarrow (A \vee \neg A)$
***D** $(\neg A \wedge C) \Leftrightarrow A$
E $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$

Chybná otázka, nezapočítána do hodnocení.

14 Která z následujících predikátových formulí je sémanticky ekvivalentní formuli $\neg\exists x \forall y\, P(x, y)$? ($P$ je binární predikát a x, y jsou proměnné.)

A $\forall x \forall y\, P(x, y)$
B $\exists x \forall y\, P(x, y)$
C $\forall y \exists x\, \neg P(x, y)$
***D** $\forall x \exists y\, \neg P(x, y)$
E $\exists y \forall x\, \neg P(x, y)$

15 Předpokládejme, že všechny proměnné jsou interpretovány jako **celá čísla** a symboly $<$ a $\leq$ jsou interpretovány jako standardní ostrá, resp. neostrá nerovnost na celých čísel. Která z následujících formulí **je** pravdivá?

A $\exists x \forall y \forall z\, (x \leq y \wedge z \leq x)$
B $\exists x \exists y \forall z\, (x \leq z \wedge x \leq y)$
C $\forall x \forall y \exists z\, (x < z \wedge z < y)$
***D** $\forall x \exists y \forall z\, (z \leq x \vee y \leq z)$
E $\exists x \forall y \forall z\, (y \leq x \vee z \leq x)$

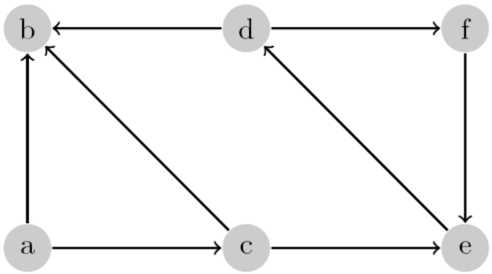
Teorie grafů

16 Kolik nejvíce hran může mít **neorientovaný graf bez smyček** o n vrcholech?

A n^2
***B** $\binom{n}{2}$
C $2n^2$
D $n!$
E 2^n

---

17 Uvažme následující orientovaný graf:

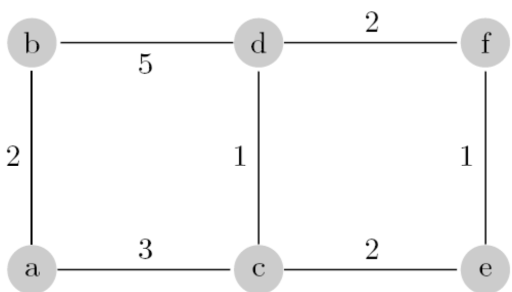


Rozhodněte, které z následujících tvrzení o prohledávaní daného grafu **do hloubky** z vrcholu a platí. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

A Vrchol b bude vždy navštíven dříve než vrchol f.
***B** Vrchol e bude vždy navštíven dříve než vrchol f.
C Vrchol f bude vždy navštíven jako poslední.
D Vrchol b bude vždy navštíven dříve než vrchol d.
E Vrchol b bude vždy navštíven jako poslední.

---

18 Uvažme následující neorientovaný, hranově ohodnocený graf:



Jaká je cena (tj. součet ohodnocení hran) jeho minimální kostry?

A 11
***B** 9
C 10
D 8
E 12

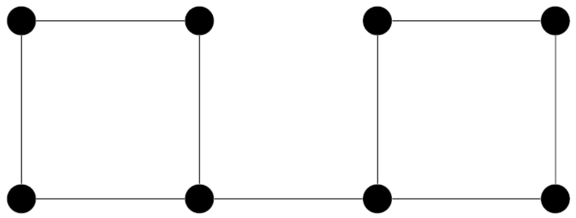
---

19 Uvažme strom o $n \geq 3$ vrcholech. Po přidání hrany mezi 2 jeho libovolné listy obecně platí:

A Graf může i nemusí zůstat stromem.
B Mezi každou dvojicí různých vrcholů vedou dvě různé jednoduché cesty.
***C** Mezi alespoň dvěma různými vrcholy vedou dvě různé jednoduché cesty.
D Graf má $n+1$ hran.
E Každý vrchol grafu leží na kružnici.
(Cesta je jednoduchá, pokud se na ní neopakuje žádný vrchol. Kružnice je cesta, která obsahuje alespoň jednu hranu a která začíná a končí stejným vrcholem, přičemž kromě tohoto vrcholu se na ní žádný vrchol neopakuje.)

---

20 Uvažme následující neorientovaný graf:



Kolik má různých koster?

A 9
B 1
***C** 16
D 8
E 10

Lineární algebra

---

21 Uvažme zobrazení typu $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které každému vektoru přiřadí jeho zrcadlový obraz vzhledem k přímce $x = y$. Která z následujících matic zadává toto zobrazení? (Uvažujte násobení maticí zleva.)

A $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$
***B** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
D $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
E Požadovaná matice neexistuje, neboť dané zobrazení není lineární.

---

22 Spočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A 0
B -3
C 18
***D** -6
E 5

---

23 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & - & z & = & -4 \\ 4x & - & 6y & - & 2z & = & -8 \end{array}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Soustava nemá řešení.
B Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.
C Soustava má právě jedno řešení.
***D** Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.
E Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

---

24 Která z následujících trojic vektorů je lineárně nezávislá?

A $(1,0,1),(1,1,0),(-1,-2,1)$
B $(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)$
C $(1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)$
***D** $(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)$
E $(1,1,1),(1,1,0),(0,0,1)$

---

25 Uvažme vektor $(2,4,6)$ ve standardní bázi $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$. Najděte jeho souřadnice v bázi $[(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0)]$.

A $(1,2,3)$
B $(4,8,12)$
C $(-1,-2,-3)$
***D** $(3,2,1)$
E Souřadnice v zadané bázi neexistují.