Zadání a řešení testu z matematiky a zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od jara 2014

Zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od jara 2014

Studium v českém jazyce

Počet podaných přihlášek	**176**
Počet přihlášených splňujících kriteria pro prominutí	27
Počet přihlášených splňujících podmínky pro přijetí	118
Počet přihlášených nesplňujících podmínky pro přijetí	58
Percentil pro přijetí	4,0 (odpovídá více než 10 bodům celkem)
Čas na řešení testu z informatiky	90 minut
Čas na řešení testu z matematiky	75 minut

Základní statistické charakteristiky

Cronbachovo alfa 0,836

		Informatika	**Matematika**	**Celkem**
Počet otázek		30	25	55
Počet uchazečů, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky		107	106	107
Nejlepší možný výsledek		30.00	25.00	55.00
Nejlepší skutečně dosažený výsledek		26.50	25.00	47.75
Průměrný výsledek		15.84	12.03	27.76
Medián		16.25	12.75	28.00
Směrodatná odchylka		5.34	5.01	9.32
	Percentil			
Decilové hranice výsledku *	10	8,7	5,5	14,5
	20	11,55	8	21,35
	30	13,75	9,75	24
	40	15,35	11,25	25,75
	50	16,25	12,75	28
	60	17,5	13,75	29,65
	70	19,3	14	32,9
	80	20,05	17,4	35,95
	90	21,25	19,7	38,75

* Decilové hranice výsledku zkoušky vyjádřené d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9 jsou hranice stanovené tak, že rozdělují uchazeče seřazené podle výsledku zkoušky do stejně velkých skupin, přičemž d5 je medián.

Přijímací zkouška - Matematika

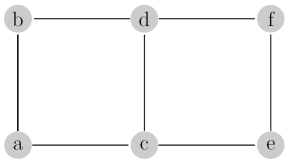
Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Teorie grafů

1 Jaký *nejmenší* počet hran musí mít souvislý neorientovaný graf o 2014 vrcholech takový, že po odebrání libovolné jeho hrany zůstane souvislý?

A 2013
***B** 2014
C $\frac{2014*2013}{2}$
D 3019
E 2015

2 Uvažme následující graf a prohledání tohoto grafu z vrcholu a:



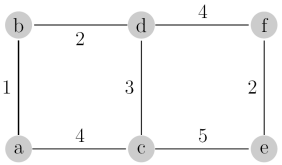
Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Při prohledávání do šířky bude vrchol d vždy prohledán dříve než vrchol e.
B Při prohledávání do hloubky bude vrchol b vždy prohledán dříve než vrchol f.
***C** Při prohledávání do šířky bude vrchol f vždy prohledán jako poslední.
D Při prohledávání do hloubky bude vrchol c vždy prohledán dříve než vrchol d.
E Vrchol e bude prohledán dříve než vrchol f při prohledávání do šířky i do hloubky.
(Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmy prohledávání do šířky, resp. do hloubky, objevují nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

3 Nechť G je libovolný neorientovaný graf a nechť K_1 a K_2 jsou nějaké kostry grafu G. Rozhodněte, které tvrzení vždy platí:

***A** $|E(K_1)| = |E(K_2)|$ a $|V(K_1)| = |V(K_2)|$
B $|E(K_1)| = |E(K_2)|$ ale nemusí platit $|V(K_1)| = |V(K_2)|$
C $|V(K_1)| = |V(K_2)|$ ale nemusí platit $|E(K_1)| = |E(K_2)|$
D $|E(K_1)| = |E(K_2)| < |E(G)|$
E $|V(K_1)| = |V(K_2)| < |V(G)|$
(Zde pro daný graf H značíme $E(H)$ počet jeho hran a $V(H)$ počet jeho vrcholů.)

4 Uvažme následující neorientovaný, hranově ohodnocený graf. Jakou nejmenší váhu může mít kostra tohoto grafu obsahující hranu $\{a, c\}$?



***A** 13
B 15
C 14
D 16
E 12

5 Nechť deg(v) značí stupeň vrcholu v v neorientovaném grafu G. Jakému číslu je roven součet stupňů všech vrcholů $\Sigma_{v \in V(G)} deg(v)$?

A $|E| + |V|$
B $|V|$
C $2|V|$
***D** $2|E|$
E $|E|$

Lineární algebra

6 Uvažme vektor $(2, 3, 5)$ ve standardní bázi $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$. Najděte jeho vyjádření v bázi $[(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)]$.

A $(3, 2, 1)$
***B** $(0, 2, 3)$
C Vyjádření v zadané bázi neexistuje.
D $(2, 3, 5)$
E $(1, 2, 4)$

7 Nechť x a y jsou libovolná reálná čísla a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení, které splňuje $f(x+2y) = 10$ a $f(y) = 3$. Čemu se rovná $f(x)$?

A -2
***B** 4
C -4
D Ze zadání není možné určit hodnotu $f(x)$.
E 2

---

8 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x - 3y - z &= -6 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

Pro její řešení platí:

A Soustava nemá řešení.
B Každý bod $\mathbb{R}^3$ je řešením.
C Soustava má nekonečně mnoho řešení a všechna leží na jedné přímce.
***D** Soustava má právě jedno řešení.
E Soustava má nekonečně mnoho řešení a všechna leží v jedné rovině.

---

9 Spočtěte determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A 8
***B** 2
C 0
D 22
E 14

---

10 Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ a nechť $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$ je k ní inverzní matice. Čemu se rovná $b_{1,1}$?

A 0
B -2
C 1
D -1
***E** 2

Množiny, relace, funkce

---

11 Pro danou množinu A označme $\mathcal{P}(A)$ množinu všech podmnožin množiny A. Čemu je rovna množina $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\emptyset)$?

A $\{\emptyset, \{(\emptyset, \emptyset)\}\}$
B $(\emptyset, \emptyset)$
***C** $\{(\emptyset, \emptyset)\}$
D $\{\emptyset\}$
E $\emptyset$

---

12 Nechť A je *tříprvková* množina. Kolik existuje různých *injektivních* funkcí z A do A ? (Pozn.: Pojem *funkce* je synonymem pojmu *totální funkce*.)

A 3
B 8
***C** 6
D 27
E 9

---

13 Která z následujících formulí je sémanticky ekvivalentní formuli $\neg(\,\forall x \exists y P(x,y) \;\Rightarrow\; \exists y \forall x Q(x,y)\,)$?

A $\exists x \forall y \neg P(x,y) \vee \exists y \forall x Q(x,y)$
***B** $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall y \exists x \neg Q(x,y)$
C $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \exists y \forall x \neg Q(x,y)$
D $\forall x \exists y \neg P(x,y) \wedge \forall y \exists x Q(x,y)$
E $\exists x \forall y \neg P(x,y) \wedge \exists y \forall x Q(x,y)$

---

14 Která z následujících formulí *není* ani tautologie ani kontradikce?

A $(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$
B $\neg A \Rightarrow (A \vee \neg A)$
***C** $(A \vee \neg A) \Rightarrow A$
D $(A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg A$
E $A \Rightarrow (A \vee \neg A)$

---

15 Která z následujících relací na množině celých čísel $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je *reflexivní*?

A $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = x - y\}$
B $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = x + y\}$
***C** $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = x^2\}$
D $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$
E $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = x\}$

---

16 Uvažme množinu $M = \{a, b, c\}$. Která z následujících relací na množině M je *relací ekvivalence*?

A $\{(a,a)\}$
B $\{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,c)\}$
C $\{(a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$
***D** $\{(a,a), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c)\}$
E $\emptyset$

Matematická analýza

17 Čemu je rovna následující limita?
$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

A 0
***B** Daná limita neexistuje.
C 1
D ∞
E -1

---

18 Která z následujících funkcí $f(x)$ *není* spojitá na $\mathbb{R}$?

A $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
B $f(x) = |x|$ (kde $|x|$ je absolutní hodnota z x).
***C** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
D $f(x) = \frac{1}{\sin(x)+10}$
E $f(x) = \cos(x)$

---

19 Uvažme funkci
$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.
Pro který z uvedených intervalů I platí, že funkce je na intervalu I konvexní? (Definici konvexnosti vám může připomenout následující příklad: funkce $g(x) = x^2$ je konvexní na intervalu $(-\infty, \infty)$, funkce $g(x) = -x^2$ není konvexní na žádném intervalu I.)

A $I = (-\infty, 0)$
B $I = (-\infty, \infty)$
C $I = (-1, 3)$
D $I = (0, 1)$
***E** $I = (1, \infty)$

---

20 Mějme funkci
$f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$.

Která z následujících funkcí je rovna derivaci funkce f?

A $4x \cdot e^{2x}$
B $x \cdot e^x \cdot (e^x + x)$
***C** $2x \cdot e^{2x} \cdot (1 + x)$
D $2x^3 \cdot e^x$
E $2x + e^{2x}$

---

21 Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pokud } x < 1 \\ 3x^2 & \text{pokud } x \geq 1. \end{cases}$$

Vypočtěte určitý integrál $\int_0^3 f(x)dx$.

A 20
B 27
C 24
***D** 29
E 33

Pravděpodobnost

---

22 Mějme nějaký pravděpodobnostní prostor a v něm nějaké náhodné jevy A a B. Říkáme, že A a B jsou *stochasticky nezávislé*, jestliže

A $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
***B** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
C $P(A \cap B) = 0$
D $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
E $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$
(Výše $P(Z)$ značí pravděpodobnost náhodného jevu Z ve zmíněném pravděpodobnostním prostoru.)

---

23 Postupně n-krát po sobě hodíme kostkou, přičemž jednotlivé hody jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že *právě* k-krát padne šestka?

A $(n-k)! \cdot k! \cdot (\frac{1}{6})^k$
***B** $\binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{n-k}$
C $(\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{n-k}$
D $\binom{k}{n} \cdot \frac{5}{6}^{n-k}$
E $\frac{k}{n}$

---

24 Uvažme osudí, ve kterém se nachází čtyři míčky, dva červené a dva zelené. Postupně z osudí náhodně vytáhneme tři míčky, přičemž vytažené míčky nevracíme. Označme p_A pravděpodobnost toho, že v osudí na konci zůstane zelený míček, p_B pravděpodobnost toho, že první dva tažené míčky mají různé barvy, a p_C pravděpodobnost toho, že druhý tažený míček je červený. Pak platí

A $p_A = \frac{2}{3}, p_B = \frac{1}{2}, p_C = \frac{1}{2}$
***B** $p_A = \frac{1}{2}, p_B = \frac{2}{3}, p_C = \frac{1}{2}$
C $p_A = \frac{1}{2}, p_B = \frac{1}{2}, p_C = \frac{3}{8}$
D $p_A = \frac{1}{2}, p_B = \frac{1}{2}, p_C = \frac{1}{2}$
E $p_A = \frac{1}{4}, p_B = \frac{2}{3}, p_C = \frac{1}{4}$

---

25 Mějme náhodné proměnné X a Y takové, že $P(X = -1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 4) = \frac{1}{4}$. Vypočtěte **střední hodnotu** náhodné proměnné $Z = 2X + 3Y$. (Zápis $P(W = a)$ značí pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná W nabude hodnoty a.)

***A** 4
B 2
C $\frac{7}{2}$
D 6
E -2