FI - Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Test z matematiky se skládá z 25 otázek, kde vybíráte jednu z možných odpovědí a,b,c,d,e. Právě jedna odpověď je správná. Každá správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem, chybně zodpovězená otázka je hodnocena -0,25 bodu. Za více vybraných odpovědí nebo žádnou odpověď se započítá nula bodů.

Matematická analýza

---

1 Určete obsah plochy ohraničené osou x a grafem funkce $f(x) = \sin(x) + x^2$ na intervalu $[0, \pi]$.

***A** $2 + \frac{\pi^3}{3}$

B 2π

C $1 + \frac{\pi^3}{3}$

D π^2

E $-1 + \frac{\pi^3}{3}$

---

2 Určete maximální hodnotu funkce $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 8x - 3$ na intervalu $[0, 5]$.

A 4

B 0

C $\frac{2}{3}$

***D** 13

E Funkce f nemá maximální hodnotu na intervalu $[0, 5]$.

---

3 Jak je nutno dodefinovat funkci $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-2}{x^2-36}$ v bodě 6 tak, aby byla spojitá na celém $\mathbb{R}$?

***A** $\frac{1}{48}$

B 6

C $\frac{1}{24}$

D 0

E ∞

---

4 Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ je

***A** omezená
B lichá
C injektivní
D sudá
E surjektivní

---

5 Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má konečnou derivaci na celém $\mathbb{R}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je obecně pravdivé.

A Funkce f má alespoň jeden lokální extrém.

***B** Integrál $\int_2^3 f(x)\,dx$ existuje a je konečný.

C Funkce $|f(x)|$ má konečnou derivaci na celém $\mathbb{R}$.

D Funkce f nabývá svého globálního maxima.

E Funkce f je omezená.

Lineární algebra

---

6 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -3x+5y-6z &= 3,\\ -2x+6y-2z &= 2,\\ +4y+3z &= 0. \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

***A** Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.

B Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

C Soustava nemá žádné řešení.

D Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

E Soustava má právě jedno řešení.

---

7 Vypočtěte $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 1\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

A $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -6\\ -4 & -4 & 14\end{pmatrix}$

***B** $\begin{pmatrix}11 & -13\\ -3 & 9\end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix}6 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix}4 & 14\\ 2 & 10\end{pmatrix}$

E Součin zadaných matic není definován.

---

8 Která z následujících matic zadává lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které odpovídá osové souměrnosti podle přímky $y = x$?

A $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

***B** $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

---

9 Která z následujících množin vektorů tvoří ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$?

A $\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2)\}$

B $\{(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0),(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}})\}$

C $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0)\}$

***D** $\{(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}),(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)\}$

E $\{(1,-1,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$

---

10 Jaké hodnoty musí nabývat x, aby byl determinant matice $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 3-x & -6\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ roven 0?

A 0
B 3
***C** 1
D -1
E 2

Množiny, relace, funkce, logika

11 Uvažme dvě formule logiky prvního řádu

$\forall x \exists y (x + y = c)$
$\exists x \forall y (x + y = y)$,

kde c je konstanta a $+$ je binární funkce. Pro kterou realizaci jsou obě formule pravdivé?

A Univerzum jsou kladná celá čísla. $+$ se realizuje jako sčítání a c se realizuje jako číslo 1.

B Univerzum je množina $\{0, 1\}$. $+$ se realizuje jako násobení a c se realizuje jako číslo 1.

C Univerzum jsou reálná čísla. $+$ se realizuje jako násobení a c se realizuje jako číslo 1.

D Univerzum jsou reálná čísla. $+$ se realizuje jako odčítání a c se realizuje jako číslo 0.

***E** Univerzum jsou celá čísla. $+$ se realizuje jako sčítání a c se realizuje jako číslo 1.

---

12 Uvažme relaci ekvivalence na množině reálných čísel takovou, že číslo x je v relaci s číslem y právě tehdy, když $sin(x) = sin(y)$. Co platí o počtu tříd rozkladu a o počtu prvků těchto tříd?

A Relace má spočetně mnoho tříd rozkladu. Třídy rozkladu mají spočetně mnoho prvků.
B Relace má spočetně mnoho tříd rozkladu. Třídy rozkladu mají nespočetně mnoho prvků.
C Relace má nespočetně mnoho tříd rozkladu. Třídy rozkladu mají nespočetně mnoho prvků.
D Relace má nespočetně mnoho tříd rozkladu. Třídy rozkladu mají právě jeden prvek.
***E** Relace má nespočetně mnoho tříd rozkladu. Třídy rozkladu mají spočetně mnoho prvků.

---

13 Která z následujících výrokových formulí je kontradikce?

A $(A \vee \neg B) \to (\neg A \Leftrightarrow B)$

B $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

C $(A \vee B) \wedge \neg(A \to B)$

***D** $\neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \to B)$

E $(A \to B) \wedge (\neg A \to B)$

---

14 Nechť $X = \{1, 2, 3\}$. Kolik existuje symetrických relací na množině X?

***A** 64
B 8
C 24
D 512
E 32

---

15 Uvažme funkce $f, g, h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, kde $\mathbb{N}_0$ označuje množinu přirozených čísel s nulou. Funkce f je zadána předpisem $f(n) = 2n$. Funkce g je zadána předpisem $g(n) = n + 1$. Co platí o $h = g \circ f$ ($\circ$ značí skládání funkcí)?

***A** Obrazem h jsou lichá čísla.

B h je bijektivní.

C Ostatní tvrzení o funkci h neplatí.

D h je surjektivní.

E Obrazem h jsou všechna přirozená čísla s nulou.

---

16 Nechť $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$. Kolik prvků obsahuje množina $\mathcal{P}(A \cup B)$? Výraz $\mathcal{P}(X)$ zde značí množinu všech podmnožin množiny X.

A 1
B 8
C 15
***D** 16
E 5

Pravděpodobnost

---

17 Dvakrát po sobě hodíme klasickou šestistěnnou kostkou.
Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že součet hodnot z obou hodů bude 5 za podmínky, že ve druhém hodu padlo větší číslo než v prvním hodu?

A $\frac{2}{36}$

B $\frac{4}{36}$

***C** $\frac{2}{15}$

D $\frac{5}{36}$

E $\frac{4}{15}$

---

18 Mějme pravděpodobnostní funkci P a dva náhodné jevy A a B. Čemu se rovná $P(A \cup B)$?

***A** $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

B $P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

C $P(A) + P(B)$

D $P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$

E $P(A) \cdot P(B)$

19 Uvažme statistický soubor s hodnotami 8, 2, 1, 4, 3, 6, 5. Jaké dvě hodnoty musíme k souboru přidat, aby jeho průměr i medián byly rovny 5?

A 5, 5
B 7, 8
***C** 6, 10
D 5, 20
E 4, 12

---

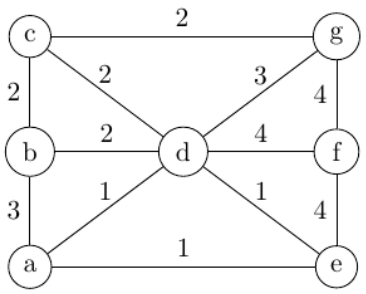
20 Uvažme náhodnou veličinu X se střední hodnotou -2 a rozptylem 3. Určete střední hodnotu veličiny $Y = X^2$.

A 5
***B** 7
C 1
D -6
E 4

Teorie grafů

---

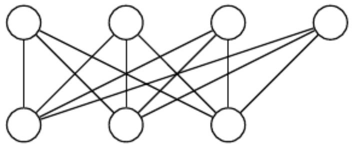
21 Rozhodněte, jak se změní cena (vzhledem k součtu ohodnocení hran) libovolné minimální kostry následujícího grafu, pokud změníme ohodnocení hrany mezi d a g na 1.



A Zvětší se o 1.
B Zvětší se o 2.
***C** Zmenší se o 1.
D Nezmění se.
E Zmenší se o 2.

---

22 Nechť $K_{3,4}$ je úplný bipartitní graf s ohodnocenými hranami. Jaký je počet hran libovolné jeho minimálni kostry?



A 4
B 7
C 5
D Odpověď záleží na daném ohodnocení.
***E** 6

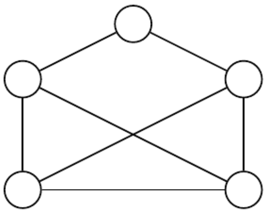
---

23 Které z následujících tvrzení obecně platí pro neorientovaný graf o 2021 vrcholech neobsahující kružnici.

A Počet hran je 2020.
B Obsahuje alespoň 3 vrcholy stupně 1.
C Graf obsahuje cestu délky 2 jako podgraf.
***D** Mezi každými dvěma vrcholy existuje nejvýše jedna cesta.
E Přidáním libovolné hrany vznikne kružnice.

---

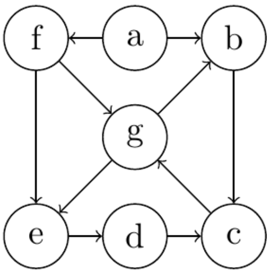
24 Kolik existuje podgrafů izomorfních kružnici o 4 vrcholech v následujícím grafu?



A 1
***B** 3
C 4
D 2
E 0

---

25 Rozhodněte, které z tvrzení o prohledávání následujícího grafu do hloubky z vrcholu a obecně platí. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledávání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)



A Vrchol f musí být objeven dříve než vrchol g.

B Vrchol d musí být objeven jako poslední.

C Vrchol c může být objeven jako poslední.

D Vrchol b musí být objeven dříve než vrchol g.

***E** Vrchol f může být objeven jako poslední.