FI - Přijímací zkouška: Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		11

Množiny, relace, funkce, logika

1 Která z následujících relací R na množině $\mathbb{Z}$ je reflexivní?

A $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \neq 2$

***B** $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$

C $(x, y) \in R \Leftrightarrow y = x + 1$ nebo y je sudé

D $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \neq y$

E $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = 2y$

2 Která z následujících formulí **nevyplývá** z formule $A \to \neg B$?

***A** $B \vee A$

B $B \vee \neg B$

C $A \to A$

D $\neg B \vee \neg A$

E $B \to \neg A$

3 Který z následujících předpisů zadává bijektivní funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

A $f(x) = 2^x$

B $f(x) = \max\{x, 0\}$

C $f(x) = |x|$

D $f(x) = 3$

***E** $f(x) = x^3$

4 Nechť $X = \{1, 2\}$. Kolik existuje na množině X relací, které jsou zároveň symetrické i antisymetrické?

A 0
***B** 4
C 16
D 2
E 1

5 Následující formule logiky prvního řádu interpretujeme nad množinou $\mathbb{N}$ přirozených čísel s nulou, přičemž všechny symboly použitého jazyka mají své přirozené interpretace. Která z následujících formulí je pak pravdivá?

A $\forall x \exists y \,.\, x + y = 0$

***B** $\forall x \forall y \,.\, x + y = 0 \to x \leq y$

C $\forall x \exists y \,.\, y < x$

D $\exists x \forall y \,.\, y \leq x$

E $\forall x \exists y \,.\, 2 \cdot y = x$

---

6 Nechť $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Kolik prvků obsahuje množina $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$? Výraz $\mathcal{P}(X)$ zde značí množinu všech podmnožin množiny X.

A 1
B 3
***C** 2
D 0
E 6

Lineární algebra

---

7 Uvažme vektor, jehož souřadnice v bázi $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, jsou $(4, 6, 2)$. Určete souřadnice tohoto vektoru v bázi $[2\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}]$.

A Žádná z ostatních možností není správná.

B $(10, 10, 12)$

***C** $(-1, 3, 3)$

D $(16, 8, 6)$

E $(-2, 2, 4)$

---

8 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4, \\ 3x + 2y + 4z &= 9, \\ 3x - 2y + 5z &= 8. \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

B Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.

C Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

D Soustava má právě jedno řešení.

***E** Soustava nemá žádné řešení.

---

9 Nechť $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Které z následujících tvrzení o prvcích matice A^{-1} inverzní k matici A je pravdivé?

A K matici A neexistuje matice inverzní.

***B** Všechny prvky matice A^{-1} jsou racionální čísla a alespoň jeden prvek matice A^{-1} není celé číslo.

C Všechny prvky matice A^{-1} jsou komplexní čísla a alespoň jeden prvek matice A^{-1} není reálné číslo.

D Všechny prvky matice A^{-1} jsou reálná čísla a alespoň jeden prvek matice A^{-1} není racionální číslo.

E Všechny prvky matice A^{-1} jsou celá čísla.

---

10 Vypočtěte $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

B Součin zadaných matic není definován.

C $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

***E** $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

11 Které z následujících zobrazení typu $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je lineární?

A $f(x, y) = (3x + 2y)^2$

B $f(x, y) = x + 1$

C $f(x, y) = xy$

***D** $f(x, y) = \pi^{-2} \cdot x + 0 \cdot xy^2$

E $f(x, y) = x + |y|$

Matematická analýza

12 Spočtěte $\int_0^{3\pi} x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$

A $3\pi + 2$

B 2

C $3\pi - 2$

D 0

***E** -2

13 Uvažme funkci $f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot (x^2 - 2)$. Určete množinu $I \subseteq \mathbb{R}$ takovou, že $x \in I$ právě tehdy, když funkce f je rostoucí v bodě x.

A $I = (-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}, \infty)$

B $I = (-\infty, 0) \cup (-1, 1)$

C $I = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

***D** $I = (-1, 0) \cup (1, \infty)$

E $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

14 Spočtěte $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{2x-2} - 1}{x - 1}$

A 1

***B** 2

C e^2

D 0

E e

15 Funkce $f(x) = \sin(|x|)$ je

A lichá a periodická
B lichá, ale není periodická
C periodická, ale není sudá ani lichá
D sudá a periodická
***E** sudá, ale není periodická

---

16 Nechť $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Spočtěte $f'(\frac{\pi}{6})$.

A $\sqrt{2}$

B $\frac{4}{3}$

***C** $\frac{2}{3}$

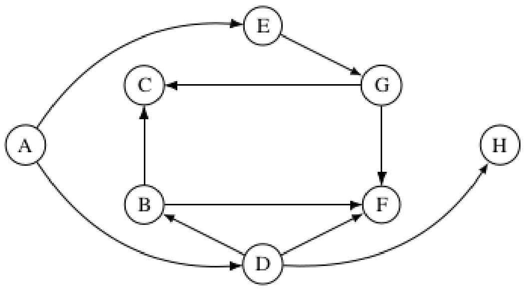
D $-\frac{4}{3}$

E $-\frac{2}{3}$

Teorie grafů

---

17 Které z nabízených tvrzení vždy platí při prohledávání následujícího grafu do šířky z vrcholu A?



Pořadí, ve kterém jsou sousední vrcholy prozkoumávaného vrcholu objevovány, není nijak pevně stanoveno.

A Vrchol G bude objeven jako poslední.
***B** Vrchol H bude objeven před vrcholem C.
C Vrchol C nebude nikdy objeven.
D Vrchol B bude objeven před vrcholem F.
E Vrchol F bude objeven před vrcholem G.

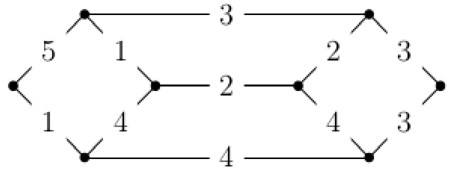
---

18 *Nejvyšší stupeň* $\Delta(G)$ v neorientovaném grafu G je definován jako nejvyšší stupeň vrcholu, který se v G vyskytuje. Který z následujících neorientovaných grafů má nejvyšší hodnotu $\Delta(G)$?

***A** úplný bipartitní graf na 7 a 7 vrcholech
B cesta na 7 vrcholech
C kružnice na 8 vrcholech
D úplný graf na 7 vrcholech
E kružnice na 7 vrcholech

---

19 Nechť G je následující ohodnocený neorientovaný graf.



Jaká je váha (každé) jeho minimální kostry?

A 17
***B** 16
C 32
D 15
E 18

---

20 *Komplementem* neorientovaného grafu $G = (V, E)$ rozumíme graf $\overline{G}$ se stejnou množinou vrcholů, který obsahuje právě ty hrany, které nejsou v G, tj. $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. Vyberte z následujících možností nejmenší číslo n takové, že existuje neorientovaný graf s n vrcholy, který je izomorfní svému komplementu.

***A** $n = 4$

B $n = 5$

C $n = 3$

D $n = 6$

E $n = 2$

---

21 Jaký je nejmenší možný počet hran, který může mít neorientovaný graf G s 5 vrcholy, má-li G mít právě 3 souvislé komponenty?

A 8
B 6
C 4
***D** 2
E 5

Pravděpodobnost

22 Uvažujme hod klasickou šestistěnnou kostkou. Jaká je podmíněná pravděpodobnost jevu, že na kostce padne dvojka za podmínky, že padne liché číslo?

A $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{6}$

***C** 0

D $\frac{6}{2}$

E $\frac{1}{3}$

23 Jaká je pravděpodobnost, že během čtyř nezávislých hodů férovou mincí padne alespoň dvakrát orel?

***A** $\frac{11}{16}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{15}{16}$

D $\frac{10}{16}$

E $\frac{5}{16}$

---

24 Kolik řešení má rovnice $x + y + z = 11$ v oboru kladných celých čísel, tj. $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?

A Žádná z ostatních odpovědí není správná.

***B** $\binom{10}{2}$, tj. 45

C $\binom{11}{2}$, tj. 55

D $\binom{10}{3}$, tj. 120

E $\binom{11}{3}$, tj. 165

---

25 Studenti mají psát test. V testu je 13 otázek. Každá otázka má 5 možností, z nichž právě jedna je správná. Za správnou odpověď student získá vždy jeden bod. Za chybnou odpověď se určitý (avšak vždy stejný) počet bodů odečte. Určete, kolik bodů musí dostat student za chybnou odpověď, aby střední hodnota bodového zisku studenta, který u všech otázek tipne odpověď náhodně, byla nulová.

***A** -0.25
B 0
C -0.2
D Ani jedna z ostatních odpovědí není správná.
E -1

Tato strana je prázdná.