FI - Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Test z matematiky se skládá z 25 otázek, kde vybíráte jednu z možných odpovědí a,b,c,d,e. Právě jedna odpověď je správná. Každá správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem, chybně zodpovězená otázka je hodnocena -0,25 bodu. Za více vybraných odpovědí nebo žádnou odpověď se započítá nula bodů. Test je rozdělen na 5 stránek, po přechodu na další stránku se již k předchozím nelze vracet.

Matematická analýza

1 Vypočítejte limitu posloupnosti:

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-(n-1)!}{(n+1)!+(n-1)!}$

A Limita neexistuje.

B $-\infty$

C 0

D ∞

***E** 1

2 Uvažujme funkci $f : [\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = \sin(x)$. V kterém bodě nabývá funkce f globálního maxima?

***A** $\frac{3\pi}{4}$

B π

C $\frac{\pi}{2}$

D $\frac{3\pi}{2}$

E Funkce f nemá globální maximum.

3 Rozhodněte, které z následujících tvrzení obecně **neplatí** pro libovolnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

***A** Funkce f má derivaci na celém $\mathbb{R}$.

B Funkce f je na intervalu $[0, 1]$ ohraničená.

C Integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

D Pokud $f(0) < 0 < f(1)$, pak má f kořen.

E Funkce f má v každém bodě $\mathbb{R}$ limitu.

4 Která z následujících funkcí je primitivní funkcí k funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je daná předpisem $f(x) = 2^x$?

***A** $\frac{2^x}{\ln 2}$

B Funkce f nemá primitivní funkci.

C $\log_2 x$

D $2^x \ln 2$

E $\frac{1}{2^x}$

---

5 Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je daná předpisem $f(x) = 2x + 3$.

A Funkce f nemá inverzní funkci.

***B** $\frac{x-3}{2}$

C $\frac{1}{3x+2}$

D $\frac{x-2}{3}$

E $\frac{1}{2x+3}$

Lineární algebra

---

6 Co **neplatí** o ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$?

***A** Vektory báze jsou lineárně závislé.

B Vektory báze jsou na sebe kolmé.

C Vektory báze generují celý prostor $\mathbb{R}^3$.

D Vektory báze jsou jednotkové.

E Báze obsahuje právě 3 vektory.

---

7 Pro kolik reálných hodnot p je determinant matice $\begin{pmatrix} 2-p & 0 & 0 \\ -1 & 1+p & 1 \\ 1 & 2 & 1-p \end{pmatrix}$ roven 0?

A 0

B 4

***C** 1

D 3

E 2

---

8 Která z následujících matic zadává lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které odpovídá rotaci o $45°$ proti směru hodinových ručiček? Uvažujte násobení maticí zleva.

***A** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

---

9 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2x - y &= 0, \\ x + y - 2z &= 4. \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.

B Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

***C** Soustava má právě jedno řešení.

D Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

E Soustava nemá žádné řešení.

---

10 Který funkční předpis zadává lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$? ($u = (u_1, u_2, u_3)$)

A $L(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

B $L(u) = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$

C $L(u) = u_1 + u_2 + 1$

D $L(u) = 2$

***E** $L(u) = 3u_1 - 2u_2 + u_3$

Množiny, relace, funkce, logika

---

11 Uvažme standardní uspořádání $\leq$ na celých číslech. Které z následujících tvrzení **není pravdivé**?

A $\forall x, y((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$

B $\forall x, y, z((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$

***C** $\exists x \forall y(x \leq y)$

D $\forall x(x \leq x)$

E $\forall x \exists y(x \leq y)$

---

12 Která z následujících binárních relací R na množině přirozených čísel bez nuly je tranzitivní a **není** symetrická?

A $R(x, y) \Leftrightarrow x = y$

***B** $R(x, y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(x = 2^k \cdot y)$

C $R(x, y) \Leftrightarrow x = 2 \cdot y$

D $R(x, y) \Leftrightarrow x \neq y$

E $R(x, y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(x \cdot y = k)$

---

13 Uvažme tyto rekurzivně zadefinované množiny $A_0 = \emptyset, A_{k+1} = \{A_k, \{A_k\}\}$. Kolik prvků má množina A_{2021}?

A 2021

B 0

C 2020

D 2^{2020}

***E** 2

---

14 Která z následujících predikátových formulí je negací formule $\exists x \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))$? (P a Q jsou unární predikáty.)

A $\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y))$

B $\forall x \exists y(Q(y) \rightarrow P(x))$

***C** $\forall x \exists y(P(x) \wedge \neg Q(y))$

D $\exists x \forall y(P(x) \wedge \neg Q(y))$

E $\forall y \exists x(P(x) \rightarrow Q(y))$

---

15 K výrokové formuli $A \wedge (A \rightarrow B)$ vyberte formuli, která je jí ekvivalentní.

A $(A \rightarrow B)$

B $A \vee B$

C A

***D** $A \wedge B$

E B

16 Nechť A je množina všech studentů Fakulty informatiky. Jakou vlastnost musí splňovat funkce $f : A \rightarrow \mathbb{N}$, která každému studentovi přiřadí jednoznačný číselný identifikátor?

A f musí alespoň jednomu studentovi přiřadit identifikátor 1.

***B** f musí být injektivní.
C Žádná z ostatních odpovědí není správně.

D f musí být surjektivní.

E f musí být bijektivní.

Pravděpodobnost

17 Marie, Petr a Jan mají 12 identických kuliček. Kolika způsoby si je mohou mezi sebe rozdělit tak, aby každý dostal alespoň 1 kuličku?

A 220
B 91
C 66
***D** 55
E 132

18 Mějme statistický soubor se 4 hodnotami, jejichž aritmetický průměr je 10. Jaký bude aritmetický průměr po přidání hodnot 0 a 2 do souboru?

***A** 7
B 8
C Nelze jednoznačně určit.
D 10
E 6

19 Uvažme náhodnou proměnnou X takovou, že $P(X = -2) = \frac{1}{3}, P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 2) = \frac{1}{3}$. Spočítejte rozptyl proměnné X.

A $\frac{2}{3}$

B 1

***C** $\frac{8}{3}$

D $\frac{2}{9}$

E 0

20 Mějme pravděpodobnostní funkci P a dva náhodné jevy A a B takové, že $A \subseteq B$. Které tvrzení obecně platí?

***A** Žádná z ostatních odpovědí není správně.

B $P(A) \geq P(B)$

C $P(B|A) = P(B)$

D $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

E $P(A|B) = P(A)$

Teorie grafů

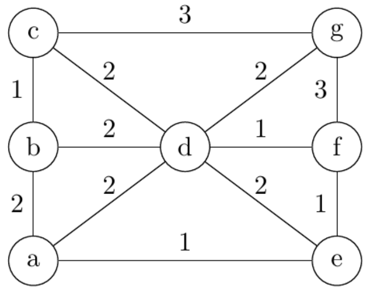
---

21 Nechť G je libovolný souvislý hranově ohodnocený neorientovaný graf s nezáporným ohodnocením hran. Pro libovolnou dvojici vrcholů u, v grafu G označme $\delta(u, v)$ délku libovolné nejkratší cesty (vzhledem k součtu ohodnocení hran) z vrcholu u do vrcholu v. Jak se obecně změní hodnota $\delta(u, v)$ pro libovolné vrcholy u, v, pokud ohodnocení každé hrany zvětšíme o 1?

A Zůstane stejná.
B Zvětší se o 1.
***C** Žádná z uvedených odpovědí není správná.
D Zmenší se.
E Zvětší se alespoň o 2.

---

22 Která z uvedených hran následujícího grafu **není** hranou žádné jeho minimální kostry?



***A** ad

B ab

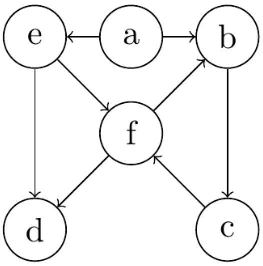
C dg

D cd

E bd

---

23 Rozhodněte, která z následujících posloupností vrcholů může vzniknout jako pořadí objevení vrcholů při prohledání grafu do šířky z vrcholu a. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledávání do šířky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)



***A** a, b, e, c, f, d

B a, b, c, f, d, e

C a, e, d, f, b, c

D a, e, b, c, d, f

E a, b, e, f, d, c

---

24 Pro které přirozené n je úplný neorientovaný graf na n vrcholech kružnicí?

A 5
B 4
C 6
***D** 3
E 7

---

25 Nechť pro neorientovaný graf G platí, že mezi každými dvěma různými vrcholy existuje právě jedna cesta. Kolik má graf G vrcholů, pokud víte, že má právě 4 hrany?

***A** 5
B 6
C Nelze jednoznačně určit.
D 3
E 4

Tato strana je prázdná.