FI - Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Test z matematiky se skládá z 25 otázek, kde vybíráte jednu z možných odpovědí a,b,c,d,e. Právě jedna odpověď je správná. Každá správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem, chybně zodpovězená otázka je hodnocena -0,25 bodu. Za více vybraných odpovědí nebo žádnou odpověď se započítá nula bodů. Test je rozdělen na 5 stránek, po přechodu na další stránku se již k předchozím nelze vracet.

Množiny, relace, funkce, logika

1 Která z následujících binárních relací na celých číslech **není** tranzitivní? (Zápis $x|y$ znamená, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $xk = y$.)

A $R(x,y) \Leftrightarrow x|y$

B $R(x,y) \Leftrightarrow x = y$

C $R(x,y) \Leftrightarrow 2|(x+y)$

D $R(x,y) \Leftrightarrow x \leq y$

***E** $R(x,y) \Leftrightarrow 3|(x+y)$

2 Uvažme množiny $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{1,2\}$. Kolik existuje různých (totálních) funkcí $f : A \to B$?

A Žádná z ostatních odpovědí není správně.
***B** 8
C 1
D 5
E 9

3 Uvažme dvě formule predikátové logiky prvního řádu

$\forall x(x * c = x)$,
$\forall x \forall y(x * y = y * x)$,

kde c je konstanta a $*$ je binární funkce. Formule budeme interpretovat nad doménou matic 5×5. Pro kterou realizaci c a $*$ jsou obě formule pravdivé?

A $*$ se realizuje jako maticové sčítání a c se realizuje jako jednotková matice.

***B** $*$ se realizuje jako maticové sčítání a c se realizuje jako nulová matice.

C $*$ se realizuje jako maticové odčítání a c se realizuje jako nulová matice.

D $*$ se realizuje jako maticové násobení a c se realizuje jako jednotková matice.

E $*$ se realizuje jako maticové násobení a c se realizuje jako nulová matice.

4 Uvažme funkce definované na kladných reálných číslech $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$, $h = f \circ g \circ f^{-1}$. Symbol $\circ$ značí skládání funkcí. Funkce f^{-1} je inverzní funkce k funkci f. Spočítejte hodnotu $h(9)$.

A 81
B 25
***C** 49
D 19
E 9

5 Uvažme množiny $A_i = \{i, i+1, i+2\}$ indexované celými čísly $i \in \mathbb{Z}$. Kolik prvků obsahuje množina $A = \bigcup_{i=1}^{10} \bigcap_{j=i}^{i+2} A_j$?

***A** 10
B 1
C 30
D 12
E 3

6 Která z následujících formulí výrokové logiky **není** splnitelná?

A $(A \leftrightarrow B) \to (A \leftrightarrow \neg B)$

B $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \to B)$

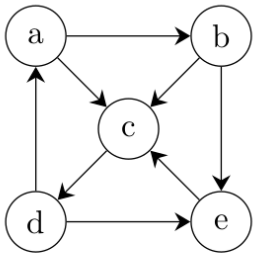
C $(A \to B) \wedge (A \leftrightarrow \neg B)$

D $(A \vee B) \to (\neg A \wedge B)$

***E** $(A \wedge B) \leftrightarrow (A \to \neg B)$

Teorie grafů

7 Rozhodněte, které z následujících tvrzení o prohledávání daného grafu do hloubky z vrcholu a platí. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)



A Vrchol b bude vždy objeven dříve než vrchol e.

B Vrchol c bude vždy objeven dříve než vrchol b.

C Vrchol d bude vždy objeven dříve než vrchol e.

***D** Vrchol c bude vždy objeven dříve než vrchol d.

E Vrchol c bude vždy objeven dříve než vrchol e.

8 Jaký je počet hran neorientovaného grafu s 10 vrcholy, pokud víte, že každý jeho vrchol má stupeň 3?

A 12

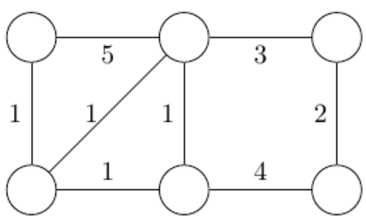
***B** 15

C 18

D 10

E 30

9 Určete počet minimálních koster následujícího hranově ohodnoceného neorientovaného grafu.



A 4

B 1

***C** 3

D 5

E 2

10 Jaký je počet podgrafů úplného neorientovaného grafu na 4 vrcholech, které mají právě 3 vrcholy? (Rozlišujeme různé izomorfní podgrafy.)

A 20

B 4

***C** 32

D 16

E 12

11 Jaký největší počet vrcholů může mít souvislý neorientovaný graf o 2022 hranách?

A 1011

B 2024

C 4044

***D** 2023

E 2021

Lineární algebra

12 Která z následujících množin vektorů tvoří ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$?

A $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

***B** $\{(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})\}$

C $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})\}$

D $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)\}$

E $\{(1,-1,0), (-1,1,0), (0,0,1)\}$

13 Pro kterou hodnotu x platí následující rovnost $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ x & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ x \\ -3 \end{pmatrix}$?

A 8

B 0

***C** 4

D 2

E Žádná z ostatních odpovědí není správně.

14 Uvažme vektor se souřadnicemi $(-3, 1, 6)$ v bázi $[u, v, w]$, kde $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Najděte souřadnice vektoru v bázi $[v, 3w, -u]$.

***A** $(1, 2, 3)$

B $(-3, 3, 6)$

C $(-3, 3, -6)$

D $(1, 18, 3)$

E $(-3, 1, 6)$

---

15 Jaká vlastní čísla má lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které odpovídá souměrnosti podle roviny? V odpovědi uvažte i jejich algebraické násobnosti.

A $1, -1, -1$

B $-1, -1, -1$

C $1, 1, 1$

***D** $1, 1, -1$

E $1, 1, 0$

---

16 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x - y + 5z &= 1, \\ -x - 3y + 3z &= 0, \\ 2x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

***A** Soustava nemá žádné řešení.

B Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

C Soustava má právě jedno řešení.

D Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

E Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.

Matematická analýza

---

17 Na kterém z následujících intervalů je funkce $e^x \cos(x)$ klesající?

A $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

B $[0, \frac{\pi}{2}]$

C $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

***D** $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

E $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

---

18 Určete obsah plochy ohraničené osou x a grafem funkce $\cos(x)$ na intervalu $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

***A** 3

B 2

C 6

D 5

E 4

---

19 Uvažujte funkci $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$. Jak je nutno ji definovat v bodě 0 tak, aby byla spojitá na celém $\mathbb{R}$?

A $f(0) = \pi$

B $f(0) = 1$

C $f(0) = \frac{1}{2}$

D $f(0) = -1$

***E** $f(0) = 0$

---

20 Které z následujících tvrzení obecně platí pro rostoucí, ohraničenou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

A Funkce f je bijektivní.

B Funkce f má v každém bodě kladnou derivaci.

***C** Limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existuje.

D Funkce f je sudá.

E Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

---

21 Nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce daná předpisem $g(x) = 3x + 7$. Která z následujících hodnot je kořenem funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = \log_2(g(x))$?

***A** -2

B -1

C 0

D $-\frac{7}{3}$

E 1

Pravděpodobnost

22 Jaký je koeficient u členu a^3b^2 v binomickém rozvoji výrazu $(a + 2b)^5$?

A 32
B 80
C 10
***D** 40
E 1

23 Uvažme statistický soubor, jehož maximální prvek je 20. Které tvrzení o mediánu obecně platí po přidání čísla 30 do souboru?

A Medián se zmenší.
B Medián zůstane stejný.
***C** Medián se nezmenší.
D Medián se nezvětší.
E Medián se zvětší.

24 Uvažme náhodnou veličinu X s rozptylem 1. Určete rozptyl veličiny $Y = 3X - 5$.

A 8
B 1
C Nelze jednoznačně určit.
D -2
***E** 9

25 Uvažme dvě diskrétní náhodné proměnné X, Y. Jejich sdružené pravděpodobnostní rozdělení je:

$$P(X = 0 \wedge Y = 0) = 1 - 2p$$
$$P(X = 0 \wedge Y = 1) = \frac{p}{2}$$
$$P(X = 1 \wedge Y = 0) = \frac{p}{2}$$
$$P(X = 1 \wedge Y = 1) = p$$

Rozdělení je parametrizováno číslem $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Pro kolik hodnot parametru p jsou náhodné proměnné X, Y nezávislé?

A ∞

B 3

C 1

***D** 2

E 0