

Číslo zadání	Předmět / Odpovědník	Jméno a příjmení / učo
15	FI - Příjímací zkouška - Matematika	

Test z matematiky se skládá z 25 otázek, kde vybíráte jednu z možných odpovědí a,b,c,d,e. Právě jedna odpověď je správná. Každá správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem, chybně zodpovězená otázka je hodnocena -0,25 bodu. Za více vybraných odpovědí nebo žádnou odpověď se započítá nula bodů.

Množiny, relace, funkce, logika

- Určete počet tříd rozkladu množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ podle relace ekvivalence \sim definované následovně:

$$x \sim y \iff 3 \mid (x^2 - y^2),$$
kde $a \mid b$ značí, že existuje $c \in \mathbb{Z}$ splňující $ac = b$.
 (A) 2
 (B) 4
 (C) 5
 (D) 3
 (E) 1
- Uvažme množiny $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, (1, 2)\}$, kde (\cdot, \cdot) značí uspořádanou dvojici. Určete počet prvků množiny $(A \times B) \cup B$.
 (A) 3
 (B) 5
 (C) 6
 (D) 1
 (E) 4

- Uvažujme následující formuli logiky prvního řádu: $\forall x \exists y (x \oplus y = c)$, kde c je konstanta a \oplus je binární funkce. Pro kterou z následujících realizací je tato formule pravdivá?
 (A) Univerzum jsou kladná celá čísla, \oplus se realizuje jako násobení a c jako číslo 1.
 (B) Univerzum jsou nezáporná celá čísla, \oplus se realizuje jako násobení a c jako číslo 0.
 (C) Univerzum jsou nezáporná celá čísla, \oplus se realizuje jako sčítání a c jako číslo 0.
 (D) Univerzum jsou celá čísla, \oplus se realizuje jako násobení a c jako číslo 1.
 (E) Univerzum jsou kladná celá čísla, \oplus se realizuje jako odčítání a c jako číslo 1.
- Uvažme následující formule výrokové logiky:

$$\phi := \neg(A \vee \neg B),$$

$$\psi := B \Rightarrow \neg A.$$
Která z uvedených formulí je ekvivalentní formulí $\phi \vee \neg \psi$?
 (A) B
 (B) $A \vee B$
 (C) $\neg A$
 (D) $\neg B$
 (E) A
- Která z následujících funkcí na množině celých čísel je injektivní, ale není surjektivní?
 (A) $f(x) = 1$
 (B) $f(x) = x^2$
 (C) $f(x) = x + 3$
 (D) $f(x) = -x$
 (E) $f(x) = 2x$

6. Uvažujme částečně uspořádanou množinu $\{0, 1, 2, 3, 6, 8, 12\}$ s uspořádáním definovaným dělitelností: x je menší nebo rovno y právě tehdy, když $x \mid y$ (tj. existuje $c \in \mathbb{Z}$ splňující $ac = b$). Které z následujících čísel je největším prvkem této množiny?

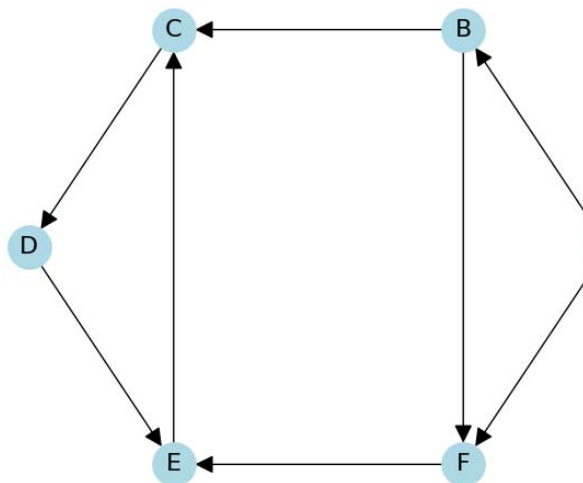
- (A) 1
 (B) 6
 (C) 0
 (D) 12
 (E) 8

Teorie grafů

7. Uvažme orientovaný graf s množinou vrcholů $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a množinou hran $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (2, 4)\}$. Dále uvažme ohodnocení hran $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $c((u, v)) = u + v - 2$. Jaká je délka nejkratší cesty mezi vrcholy 1 a 4 vzhledem k ohodnocení c ?

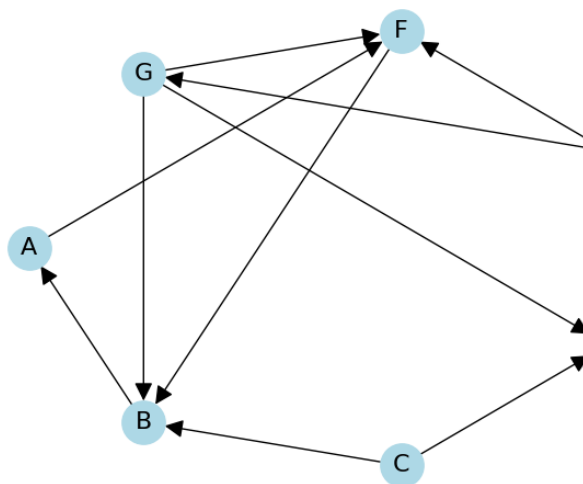
- (A) 11
 (B) 4
 (C) 9
 (D) 6
 (E) 5

8. Kolik má následující orientovaný graf silně souvislých komponent?



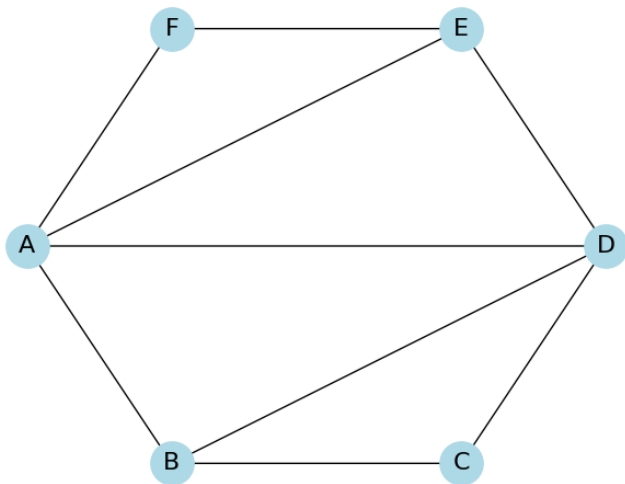
- (A) 3
 (B) 1
 (C) 4
 (D) 5
 (E) 6

9. V následujícím orientovaném grafu spustíme nezávisle prohledávání do hloubky postupně z každého vrcholu. Při každém prohledávání označíme každý navštívený vrchol. Kolikrát je označen vrchol D ?



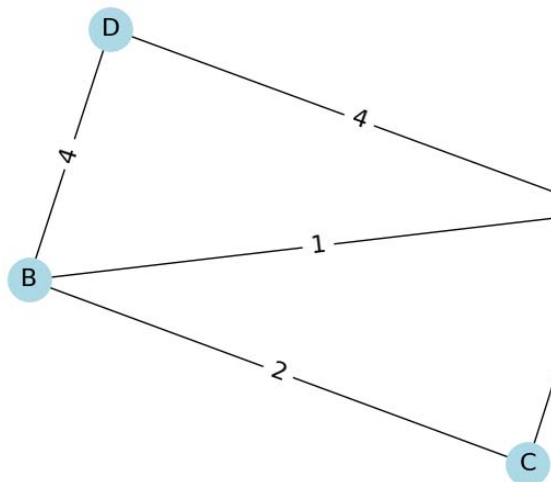
- (A) 5
 (B) 2
 (C) 3
 (D) 4
 (E) 7

10. Průměr r grafu s množinou vrcholů V a množinou hran E je maximální vzdálenost dvou jeho vrcholů. Formálně $r = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}$. Zde $d(u, v)$ značí vzdálenost vrcholů u a v , tedy počet hran nejkratší cesty, která je propojuje. Určete průměr následujícího grafu.



- A 4
 B 3
 C 5
 D 2
 E 1

11. Řekneme, že hrana grafu je *nudná*, pokud jejím odebráním z grafu nezměníme hodnotu jeho minimální kostry. Kolik má následující graf nudných hran? (Uvědomte si, že graf může mít více minimálních koster.)



- A 2
 B 1
 C 4
 D 5
 E 3

Lineární algebra

12. Která z následujících funkcí je lineární zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R} ?
- A $f(x, y, z) = \frac{x+y}{2y+z}$
 B $f(x, y, z) = (x - 2y) \cdot (3z + x)$
 C Žádná z uvedených funkcí
 D $f(x, y, z) = x \cdot y + z$
 E $f(x, y, z) = \sin(5) \cdot x - 2y + \cos(-3) \cdot$

13. Které tvrzení platí pro množinu reálných řešení následující soustavy rovnic?
- $$3x + 5y + z = 2$$
- $$7x - 2y + 4z = 3$$
- $$4x - 7y + 3z = 1$$
- (A) Množina řešení je rovina neprocházející bodem $(0,0,0)$.
 (B) Množina řešení je přímka procházející bodem $(0,0,0)$.
 (C) Množina řešení je rovina procházející bodem $(0,0,0)$.
 *(D) Množina řešení je přímka neprocházející bodem $(0,0,0)$.
 (E) Každý vektor (x, y, z) je řešením.

14. Určete hodnotu determinantu inverzní matice k matici $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 2 \end{pmatrix}$.
- (A) $1/2$
 *(B) 3
 (C) $1/3$
 (D) 2
 (E) $7/3$

15. Uvažme přímku v rovině s normálovým vektorem $(2, 3)$ procházející body $(0, 3)$ a $(x, 5)$, kde x je reálné číslo. Čemu je rovno x ?
- (A) $4/3$
 (B) 2
 *(C) -3
 (D) -2
 (E) 0

16. Jaká je euklidovská vzdálenost mezi vektory u a v , pokud $u = M \cdot v$,
 $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?
- *(A) $\sqrt{10}$
 (B) $\sqrt{7}$
 (C) 3
 (D) $2\sqrt{3}$
 (E) 4

17. Necht' $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce splňující $g(x) = x^2 f(x)$ a mající derivace $f'(x), g'(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Určete $g'(-1)$, pokud víte, že $f(-1) = 1$ a $f'(-1) = 2$.
- (A) 1
 (B) -1
 *(C) 0
 (D) 3
 (E) 2

18. Určete maximum funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 2$ na uzavřeném intervalu $[2, 5]$.
- (A) -7
 (B) -6
 (C) 0
 *(D) -3
 (E) -2

19. Spočítejte následující limitu:
- $$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^2 - \pi^2)}{(x - \pi) \cos(x)}$$
- (A) $-\infty$
 (B) 0
 (C) ∞
 *(D) -2π
 (E) 2π

20. Která z následujících řad je konvergentní?
- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
 *(B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$
 (C) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$
 (D) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$
 (E) $\sum_{n=0}^{\infty} n$

21. Spočítejte následující určitý Riemannův integrál:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)x \, dx.$$

- (A) $\frac{1}{2}$
 (B) 1
 (C) -1
 (D) π
 (E) 0

Pravděpodobnost

22. Kolika způsoby lze vytvořit tým o třech holkách a dvou klucích ze skupiny obsahující pět holek a čtyři kluky?

- (A) 60
 (B) 16
 (C) 48
 (D) 30
 (E) 56

23. Které z následujících tvrzení platí pro každou pravděpodobnostní funkci P a každé dva náhodné jevy A, B splňující $P(B) \neq 0$?

- (A) Žádné z uvedených tvrzení neplatí.
 (B) Pokud $P(A|B) = P(A)$, pak jsou A a B nezávislé.
 (C) Pokud $A \cap B = \emptyset$, pak jsou A, B nezávislé.
 (D) Pokud jsou A a B nezávislé, pak $P(A|B) = P(B)$.
 (E) Pokud jsou A a B nezávislé, pak $P(A)P(B) = 1$.

24. Necht' $x \in \mathbb{R}$ a mějme statistický soubor hodnot $x - 4, x + 11, 6 - x, 2x$. Jaký je jeho medián, pokud víte, že průměr je 7?

- (A) 5,5
 (B) 5
 (C) 6
 (D) 4,5
 (E) 7

25. Určete rozptyl diskrétní náhodné veličiny s oborem hodnot $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti.

- (A) $\sqrt{11}$
 (B) 2
 (C) $\sqrt{2}$
 (D) $\sqrt{3}$
 (E) 3